Corrigé de la Série 3 (Matrices)

Exercice ①:

Le calcul de BA donne:

$$\begin{array}{cc} & A \\ & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \\ B & \\ BA = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} & = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \\ +1 & -2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Le calcul de CB donne:

$$CB = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Le calcul de AC donne:

$$AC = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ -5 & 6 & 1 \\ 0 & 20 & -5 \end{pmatrix}$$

Le calcul de CA donne:

$$CA = \begin{pmatrix} 3 & -11 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

Le calcul de EF donne =

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ (1, 2) & 1 \times 1 + 3 \times 2 = 7 \end{array}$$

Le calcul de FE donne

$$\begin{array}{cc} & (1 \;\; 2) \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \end{array}$$

On ne peut pas calculer le produit BC car le nombre de colonnes de B n'est le même que le nombre de lignes de C.

On peut de plus remarquer qu'en général le produit des matrices n'est pas commutatif ($EF \neq FE$).

2) Le calcul de $B^T C^T$ donne :

$$B^T C^T = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Le calcul de $(CB)^T$ donne :

$$(CB)^T = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 :

1_ La matrice A est inversible donc :

$$AA^{-1} = I_n.$$

donc A^{-1} est inversible et son inverse est A.

Donc :

$$(A^{-1})^{-1} = A^{-1}.$$

2_ a. La matrice A est inversible, donc :

$$AA^{-1} = I_n = A^{-1}A$$

c'est-à-dire

$${}^tA\,{}^t(A^{-1}) = {}^t(I_n) = I_n$$

Ainsi ${}^tA$ est inversible et son inverse est ${}^t(A^{-1})$

Donc :

$$({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1}).$$

b_ Si la matrice est inversible, alors d'après la question précédente, ${}^tA$ est inversible.

Réciproquement, si la matrice $B = {}^tA$ est inversible, alors d'après la question précédente, ${}^tB = {}^t({}^tA) = A$ est inversible, c'est à dire A est inversible.

3) Prenons :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La matrice :

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

n'est pas inversible

4) D'après ce qui précède, L'ensemble des matrices inversible de $M_n(\mathbb{R})$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$.

Exercice 3

1- Le produit Au donne :

$$Au = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7x + 5y \\ -6x - 4y \end{pmatrix}$$

On en déduit que :

$$f(x,y) = (7x + 5y, -6x - 4y).$$

2) on calcule :

$$A^2 - 3A + 2I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

3) on peut écrire : $A(A - 3I_2) = -2I_2$.

On en déduit que A est inversible et :

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}(A - 3I_2)$$

Soit :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -\frac{5}{2} \\ 3 & \frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

Exercice : 4

1 - La matrice F de l'endomorphisme f est donnée par :

$$F = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

La matrice G de l'endomorphisme g est donnée par :

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

2 - Le produit Hu donne :

$$Hu = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ -2x+y+z \\ x-y-z \end{pmatrix}$$

On en déduit que :

$$h(x,y,z) = (x+y, -2x+y+z, x-y-z).$$

3 - Calculons $g(x,y,z)$ en utilisant sa matrice :

On a : $g(x,y,z) = (2x+y, -3x-y+z, x+3y-z)$

Calculons $g(x,y,z)$ en utilisant son expression dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On pose : $u = x e_1 + y e_2 + z e_3$

On a alors : $g(x,y,z) = x\, g(e_1) + y (e_2) + z\, g(e_3)$

$$= x(2e_1 - 3e_2 + e_3) + y(e_1 - e_2 + 3e_3) + z(e_2 - e_3)$$
$$= (2x+y+z) e_1 + (-3x-y+z) e_2 + (x+3y-z) e_3$$

Ce qui donne à nouveau :

$$g(x,y,z)=(2x+y+z,\,-3x-y+z,\,x+3y-z)$$

4. • Caractérisons $(f\circ g)$ en utilisant les matrices de f et g.

Le calcul du produit $F\times G$ donne :

$$F\times G=\begin{pmatrix}11 & 10 & -3\\ 5 & 2 & -1\\ 6 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

• Considérons $f\circ g)$ en utilisant les expressions de f et de g dans la base canonique.

On a :

$$(f\circ g)(x,y,z)=f(g(x,y,z))$$

puis :

$$f(g(x,y,z))=(3(2x+y)-(-3x-y+z)+2(x+3y-z),$$
$$(2x+y)-(-3x-y+z),\,2(2x+y)-(-3x-y+z)$$
$$-(x+3y-z)).$$
$$=(11x+10y-3z,\,5x+2y-x,\,6x).$$

Le calcul de l'expression de $(g\circ f)$ se fait de la même manière.

5) Le calcul de $2F+3G$ donne :

$$2F+3G=\begin{pmatrix}12 & 1 & 4\\ -7 & -5 & 3\\ 7 & 7 & -5\end{pmatrix}$$

On en déduit l'expression de l'endomorphisme $2f+3g$:

$$(2f+3g)(x,y,z)=(12x-y+4z,-7x-5y+3z,7x+7y-5z)$$

6/8

Exercice 5

1_a la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$ est :

$$\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$$

On en déduit que :

$$\dim M_2(\mathbb{R})=4.$$

b_ Montrons que la famille $\mathcal{B}=(A,B,C,D)$ est libre.

Soient $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ quatre réels tels que :

$$\alpha A+\beta B+\gamma C+\delta D=0$$

c'est-à-dire $\begin{pmatrix}\alpha+\beta & \alpha+\gamma\\ -\gamma & \delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=0$

soit : $\delta=\gamma=\alpha=\beta=0$

La famille $\mathcal{B}=(A,B,C,D)$ est libre. Or $\dim M_2(\mathbb{R})=4$, donc $\mathcal{B}$ est une base de $M_2(\mathbb{R})$.

c) Par application f, on a :

$$\begin{cases} f(A)=A+{}^tA=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\1&0\end{pmatrix}\\ \quad=2A-C\\ f(B)=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}=2B\\ f(C)=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}=0\\ f(D)=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=2D. \end{cases}$$

a matrice f est donc donnée par :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$